4/ a) Le point H est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle ABC et Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ et puisque M est un point de Δ donc $MA = MB = MC$.
Ou bien : $M \in \Delta$ donc $M(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$.

$$\begin{cases} MA^2 = \alpha^2 + (\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2 \\ MB^2 = \alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha-1)^2 \\ MC^2 = (\alpha+1)^2 + (\alpha-1)^2 + \alpha^2 \end{cases} \text{ donc } MA = MB = MC.$$

b) $I \in \Delta$ donc $I(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$ $IA = ID \Leftrightarrow IA^2 = ID^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha+1)^2 = (\alpha-3)^2 \Leftrightarrow \alpha = 1$, il en résulte qu'il existe un unique point $I(2,2,2)$ de Δ tel que $IA = ID$.

c) Le point $I \in \Delta$, d'après a) et b), $IA = IB = IC = ID$, il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon $IA = \sqrt{5}$.

Corrigé d'exercice N°6 : 2016 pr

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $-5 \neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.

2) a) $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$. Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

b) $d(I,P) = \sqrt{3} < R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2}$ et puisque $J \in P$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de $\mathscr{C}$.

c) $d(I,Q) = 3\sqrt{3} > R$, on en déduit que $S \cap Q = \varnothing$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

b) Soit $M(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 2x + 2y - 2z + 2 = 2(x+y-z+1)$.

4) $$\begin{cases} M \in S \\ V_{(ABCM)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6}\left|2(x+y-z+1)\right| = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ x+y-z-5=0 \text{ ou } x+y-z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in (S \cap P) \cup (S \cap Q) \Leftrightarrow M \in S \cap P = \mathscr{C}$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn

Librairie Devoir.TN
53 04 42 33 | 99 06 27 69